IES AZCONA – ALMERÍA DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTIVIDADES RECUPERACIÓN EVALUACIÓN SEPTIEMBRE

NIVEL: 4º ESO – Op. B

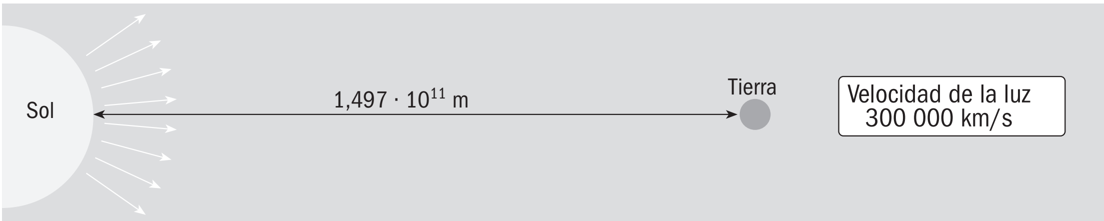
Alumno/a :______________________________ Nivel: 4º -Opción B

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Completa la tabla siguiente y escribe las mejores aproximaciones, hasta el orden indicado, por exceso y por defecto, y los redondeos del número $10\pi = 31{,}41592654...$

	Decenas	Unidades	Décimas	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas
Exceso	40					
Defecto				31,41		
Redondeo				31,42		

2.



¿Cuánto tiempo tardará en llegarnos a la Tierra la luz del Sol?

3. Comprueba si son ciertas o no las igualdades siguientes.

a) $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{8}$ **c)** $\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ **d)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5} = 5$

4. El número de oro, también llamado número de Fibonacci o proporción áurea, es un número irracional que tiene la expresión $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Completa esta tabla utilizando la calculadora y contesta a las siguientes preguntas.

	Aproximación con 9 cifras decimales
ϕ	
ϕ^2	
ϕ^{-1}	

a) ¿Tienen la misma parte decimal? Piensa que la calculadora siempre redondea, pero utiliza números aproximados, aunque el error sea muy pequeño.

b) Completa la siguiente cadena de igualdades operando con radicales.

$$\phi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{\left(1 + \sqrt{5}\right)^2}{4} = ... = 1 + \phi \qquad 1 + \phi = 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = ... = \phi^{-1}$$

5. Las ondas sonoras, como todas las ondas, transportan energía, y su intensidad depende de la potencia del aparato emisor y de la distancia que ha recorrido la onda. El oído humano sólo es capaz de detectar sonidos con una intensidad mínima, llamada intensidad umbral, de $I_0 = 10^{-12}$ W/m². La percepción que tiene el oído humano de un sonido se llama "sonoridad", se mide en decibelios (dB) y se obtiene por la relación $\beta = 10 \cdot \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$. Determina la sonoridad de los siguientes sonidos que llegan al oído de una persona con las intensidades que se indica.

a) $I_1 = 10^{-9}$ W/m² **b)** $I_2 = 10^{-12}$ W/m² **c)** $I_3 = 8{,}5 \cdot 10^{-8}$ W/m²

6. Expresa las siguientes igualdades mediante potencias y determina el valor de la incógnita en cada caso.

a) $\log A = 3$ **b)** $\log^5 B = 5$ **c)** $\log C = 1{,}2$ **d)** $\log_D 343 = 3$ **e)** $\ln E = 2$

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 2x^4 + 6x^3 - 8x$ **c)** $R(x) = x^4 - 16x^2$

b) $Q(x) = 3x^4 - 18x^3 + 27x^2$ **d)** $S(x) = x^3 + 3x^2 - 25x + 21$

Resolvemos

a) *Vamos a factorizar el polinomio siguiendo estos pasos.*

	$P(x) = 2x^4 + 6x^3 - 8x$
1.º Extraer factor común, si se puede.	$P(x) = 2x(x^3 + 3x^2 - 4)$
2.º Comprobar si el polinomio que queda entre paréntesis es una igualdad notable.	*En este caso no se trata de ninguna igualdad notable.*
3.º Buscar los divisores de la forma $x - a$. *En este paso se pueden utilizar diversos métodos de los ya estudiados: regla de Ruffini, teorema del factor, o resolver la ecuación de segundo grado en el caso de que el polinomio que tuviéramos fuera de grado 2.*	*Aplicamos Ruffini al polinomio que tenemos,* $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4$, *y se obtiene:* $Q(x) = (x - 1)(x^2 - 4x + 4)$ *Ahora nos queda:* $P(x) = 2x(x - 1)(x^2 - 4x + 4)$
4.º Volver al paso 2 con el polinomio que tenemos entre paréntesis.	*El polinomio* $x^2 - 4x + 4$ *es una igualdad notable, y se tiene:* $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

Ahora tenemos $P(x) = 2x(x - 1)(x - 2)^2$. *El proceso termina cuando el polinomio está totalmente factorizado o cuando en cualquier paso nos encontramos con un polinomio irreducible.*

2. Dados los polinomios $P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 5$, $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$ y $R(x) = x^4 - 5x^2 + 6$, relaciona con flechas las dos columnas.

$P(-1)$	
$Q(2)$	1
Término independiente de $Q(x)$	
Grado $P(x)$	2
Término independiente de $R(x)$	
Grado $R(x)$	3
$R(-2)$	4
Término independiente de $P(x)$	
Grado $Q(x)$	5
Grado de $P(x) + Q(x)$	

3. En un rectángulo, el lado mayor es dos unidades inferior al cubo del menor. Expresa algebraicamente el valor del perímetro y del área del rectángulo.

4. Dados los polinomios $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 7x - 3$ y $Q(x) = x^2 - x$, efectúa las siguientes operaciones.

a) $P(x) + Q(x)$ **b)** $P(x) - Q(x)$ **c)** $P(x) \cdot Q(x)$ **d)** $P(x) : Q(x)$ **e)** $Q^2(x)$

5. Realiza las siguientes operaciones.

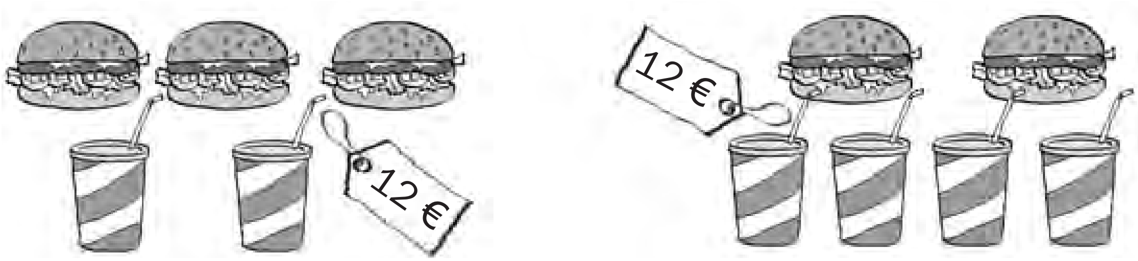
a) $(4x - 2)(4x + 2)$ **b)** $(3x - 2)^2$ **c)** $(2x - 2)^3$ **d)** $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ **e)** $\left(x + \frac{1}{5}\right)^2$

6. Rodea los números que sean raíces de cada polinomio.

Polinomios	Posibles raíces
$P(x) = x^2 - 3x + 2$	1, −1, 2, 3, −5, 6
$Q(x) = x^3 - 7x - 6$	−1, 1, −2, 2, −3, 3
$R(x) = x^4 - 13x^2 + 36$	0, −1, 1, −2, 2, 3

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Calcula el precio de una hamburguesa y un refresco:



2. Halla las dimensiones de un campo sabiendo que la diagonal mide 50 metros, y el perímetro, 140.

Resuelve este problema siguiendo estos pasos.

- *Haz un dibujo del campo y da un nombre a la longitud de los lados. (Por ejemplo,* x *e* y*).*
- *Como tenemos dos incógnitas, para hallarlas necesitamos plantear dos ecuaciones. Averigua qué datos nos da el enunciado para plantear dos ecuaciones.*
- *El perímetro del campo es de 140 m. Recuerda qué es el perímetro de una figura y plantea la primera ecuación. ¡Ya tienes la primera ecuación del sistema!*
- *Dibuja la diagonal del campo. ¿Recuerdas algún resultado matemático que relacione la diagonal de un rectángulo y los lados? Piensa que se forma un triángulo rectángulo... ¡ya tienes la segunda ecuación!*
- *Resuelve el sistema planteado.*
- *Interpreta los resultados. Es decir, la resolución del problema debe terminar diciendo: "Las dimensiones del campo son ______ y ______ m".*

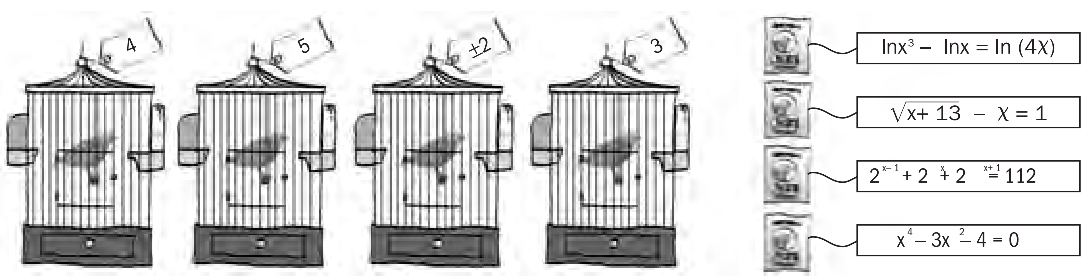
3. Un padre tiene 42 años, y su hijo, 10. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el triple que la del hijo?

Existen problemas de ecuaciones en los que hacer una tabla con los datos facilita bastante su resolución, como, por ejemplo, este. Llamamos x *a los años que van a pasar para que la edad del padre sea el triple que la del hijo. Para resolver este problema construimos una tabla:*

	Edad actual	Edad dentro de 3 años	Edad dentro de 5 años	Edad dentro de *x* años
Padre	42	42 + 3		
Hijo				

Completa la tabla y, usando la última columna, plantea la ecuación. Cuidado, no olvides los paréntesis.

4. Mi abuela se ha ido de vacaciones y me ha encargado dar de comer a sus pajaritos. Me ha dejado 4 bolsitas con la comida de cada uno, pero yo no sé lo que come cada uno. Como a mi abuela le gustan mucho los acertijos, me ha dejado uno para que adivine qué bolsita corresponde a cada pájaro.

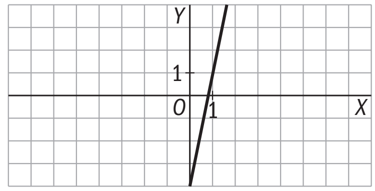


También me ha dejado una nota que dice: "Sin resolver las ecuaciones, asigna a cada pájaro su bolsita y, después, revuélvelas para comprobar que no te has equivocado". ¿Qué bolsita darías tú a cada pájaro?

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. La siguiente tabla muestra los pasos que debes seguir para resolver gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 5x - y < 4 \\ x - y < 0 \end{cases}$$

1.º Representamos la recta $5x - y = 4$ *, consideramos un punto cualquiera de uno de los semiplanos en que queda dividido el plano y sustituimos sus coordenadas en la inecuación; por ejemplo, (0, 0):* $5 \cdot 0 - 0 < 4$*. Los valores del punto (0, 0) son solución de la inecuación, y también los valores de las coordenadas de todos los puntos del semiplano que los contiene. Rayamos este semiplano.*	
2.º Hacemos lo mismo que en el apartado anterior con la recta $x - y = 0$*.*	
3.º La solución es la región común a ambos semiplanos.	

Completa la tabla anterior y utilízala para resolver los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x - y > 1 \\ x + y < 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y > 4 \\ 2x - y > -6 \end{cases}$

2. La tabla muestra los pasos que tienes que seguir para resolver la inecuación de primer grado $\dfrac{3(x-1)}{3} \geq \dfrac{6x-4}{5}$.

1.º Eliminamos paréntesis.	$\dfrac{3x-3}{3} \geq \dfrac{6x-4}{5}$
2.º Suprimimos denominadores.	$15x - 15 \geq 18x - 12$
3.º Transponemos términos.	
4.º Reducimos términos semejantes.	
5.º Despejamos la incógnita: debemos tener en cuenta que al dividir entre un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.	
6.º Escribimos el conjunto solución.	

Completa la tabla anterior y utilízala para resolver las siguientes inecuaciones.

a) $\dfrac{x}{6} - 1 \leq 2 - \dfrac{1-x}{3}$ **b)** $2(1-x) - 3 + 3(x-2) < 1$ **c)** $\dfrac{3x+2}{3} \geq \dfrac{5x-4}{6}$

3. Completa el cuadro que resuelve la inecuación de segundo grado $3x^2 + 5x - 2 > 0$.

1.º Factorizamos la ecuación $3x^2 + 5x - 2 = 0$*. Las soluciones dividen la recta real en tres intervalos.*	$3x^2 + 5x - 2 = 3(x+2)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$
2.º Comprobamos el signo de la inecuación en cada uno de los intervalos.	
3.º Observamos que la inecuación tiene el signo $>$*. Así, las soluciones de la inecuación son los intervalos en los que el signo es positivo.*	

4. Asocia cada enunciado con la inecuación o sistema que corresponde, y después resuélvelos.

A ¿Entre qué valores puede estar la longitud de los lados de un triángulo si se sabe que el perímetro es mayor de 20 centímetros y menor de 44?

B Las notas de matemáticas de un alumno en las evaluaciones primera y segunda han sido 4 y 7. ¿Qué nota como mínimo ha de sacar en la tercera para obtener más de un 6 de nota media?

C Con 24 euros puedo comprar 6 revistas y aún me sobra dinero. Con 35 euros no me llega para comprar 10. ¿Entre qué valores se encuentra el precio de una de estas revistas?

1 $6x < 24$
$10x > 35$

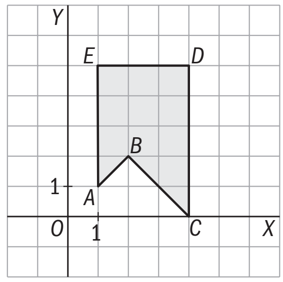
2 $2x + 2y > 20$
$2x + 2y < 44$

3 $\dfrac{4 + 7 + x}{3} > 6$

5 Semejanza

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. En el pentágono de la figura, los vértices son los puntos $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(4, 0)$, $D(4, 5)$ y $E(1, 5)$.



a) Representa una figura semejante en la que los puntos homólogos de A y B sean $A'(5, -2)$ y $B'(3, -4)$.

b) ¿Cuál es la razón de semejanza?

c) Determina la longitud de los lados de los dos pentágonos semejantes y la medida de los ángulos interiores de los pentágonos.

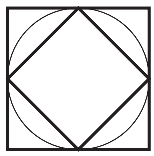
2. Calcula los valores de x e y en las siguientes proporciones.

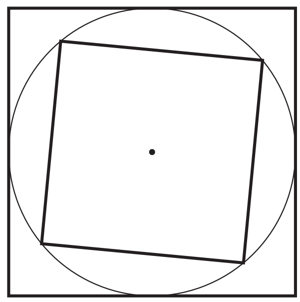
a) $\dfrac{6}{9} = \dfrac{4}{x} = \dfrac{y}{12}$ **b)** $\dfrac{x+y}{x} = \dfrac{12}{x+1} = \dfrac{21}{7}$ **c)** $\dfrac{5}{x} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{40}$

3. Justifica que si dos triángulos isósceles tienen un ángulo de 100 grados, entonces son necesariamente semejantes. ¿Se podría decir lo mismo si ambos tienen al menos un ángulo igual de 70 grados?

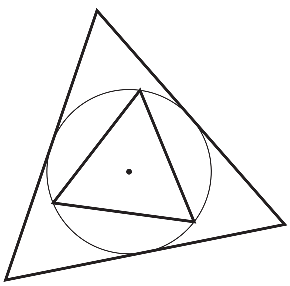
4. Los cuadrados son siempre semejantes. ¿Cuál es la razón de semejanza y la razón de las áreas de los cuadrados de la figura?

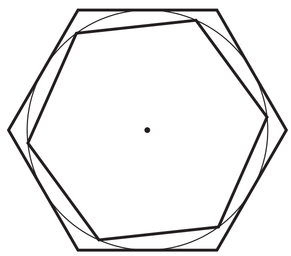
Observa que si el cuadrado inscrito lo giras convenientemente, su tamaño no cambia; sin embargo, es muy fácil determinar la razón de las áreas de los dos cuadrados.





5. Al igual que los cuadrados, todos los polígonos regulares con el mismo número de lados son semejantes, porque sus ángulos son iguales. Determina la razón de las áreas y la razón de semejanza en los dos casos siguientes.





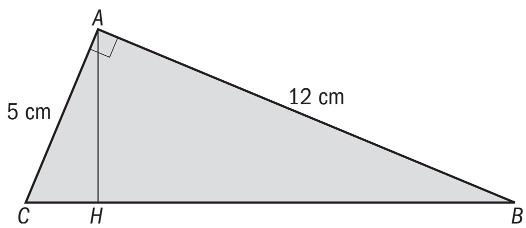
6. En un plano de carreteras a escala 1 : 2 500 000, la distancia de Madrid a Barcelona en línea recta es de 22,4 centímetros. ¿Cuál es la distancia real entre Madrid y Barcelona en línea recta?

7. En el triángulo rectángulo de la figura se ha trazado la altura AH sobre la hipotenusa.

a) Determina la longitud de la hipotenusa.

b) Justifica, utilizando criterios de semejanza, que los triángulos ABC, HBA y HAC son semejantes. Indica cuáles son los lados homólogos.

c) A partir de la relación de semejanza anterior, determina la medida de los segmentos CH, AH y HB, así como el área de cada uno de los triángulos.



ACTIVIDADES DE REFUERZO

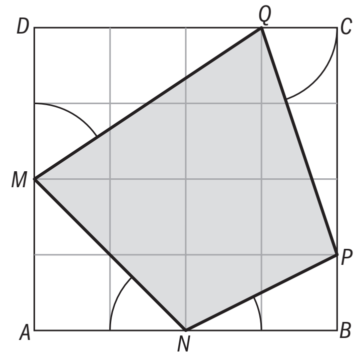
1. La Torre Inclinada de Pisa fue construida para que permaneciera en posición vertical, pero comenzó a inclinarse tan pronto como se inició su construcción, en 1173. En 1990 fue cerrada al público para tratar de rectificar su inclinación, consiguiendo reducir 46 centímetros su desplazamiento respecto de la vertical. Se volvió a permitir la entrada en 2001. La altura de la torre es de 55,7 metros desde la base, y la inclinación actual es unos 4,5 metros respecto de la vertical.

Determina con estos datos:

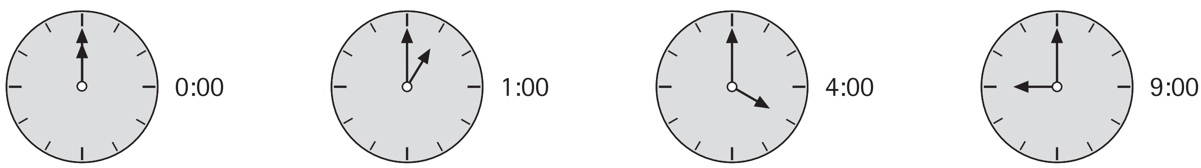
a) El ángulo de inclinación actual de la torre y el ángulo de inclinación que tenía antes de repararla.
b) El ángulo de inclinación que se consiguió rectificar.

2. El cuadrado grande de 4 centímetros de lado está formado por 16 cuadrados pequeños iguales.

a) Calcula la longitud de los lados del cuadrilátero *MNPQ*.
b) Expresa en forma de fracción la tangente de los ángulos marcados en la figura, $\widehat{QMD}$ $\widehat{PQC}$ $\widehat{MNA}$ $\widehat{BNP}$.
c) Utiliza un semicírculo graduado para determinar la medida aproximada de los ángulos anteriores.
d) Teniendo en cuenta el valor de la tangente de esos ángulos y utilizando la calculadora, halla su medida en grados, minutos y segundos. Compara los resultados con los obtenidos experimentalmente midiendo con el semicírculo graduado.
e) Deduce la medida de los ángulos del cuadrilátero *MNPQ*.



3. Expresa en grados sexagesimales y en radianes el ángulo que forman las agujas del reloj cuando son todas las horas en punto, desde las 0:00 hasta las 12:00. Considera los ángulos orientados desde la aguja de las horas hasta la de los minutos y en sentido antihorario.

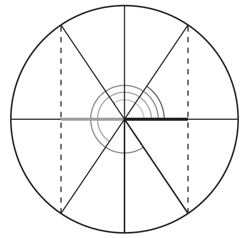


4. Sabiendo que $\alpha = 32° \, 23' \, 50''$, $\beta = 35° \, 23' \, 50''$ y $\gamma = 110° \, 45' \, 23''$, efectúa sin utilizar la calculadora las siguientes operaciones con esos ángulos.

a) $\alpha + \beta + \gamma$ **b)** $\gamma - (\alpha + \beta)$ **c)** $5\alpha - 2\beta$ **d)** $180° - \gamma$

Comprueba después con la calculadora los resultados que has obtenido.

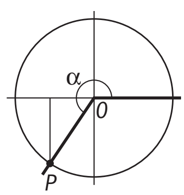
5. En la circunferencia goniométrica de la figura se han representado cuatro ángulos, uno de cada cuadrante, y se ha marcado el coseno de cada uno de ellos, siendo estos iguales u opuestos. Si uno de los ángulos es de 124°, indica la medida de los otros tres y relaciona el coseno de los cuatro ángulos, indicando cuándo son iguales y cuándo son opuestos.



6. Calcula, ayudándote de la calculadora, el valor aproximado de *x* en las siguientes ecuaciones, teniendo en cuenta que siempre es un ángulo del primer cuadrante.

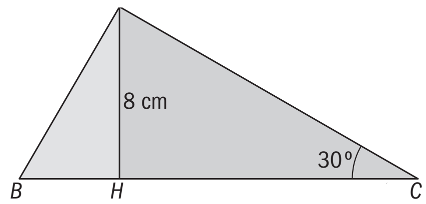
a) $\text{tg}\, x = 0{,}8532$ **b)** $\cos(180° - x) = -0{,}4$ **c)** $\text{sen}\,(2x + 180°) = -0{,}5$ **d)** $3 + \text{tg}\, x = 4{,}8654$

7. El lado final del ángulo α corta la circunferencia de la figura en el punto *P* de coordenadas $(-3, -4)$. Determina el radio de la circunferencia y los valores del seno, el coseno y la tangente del ángulo α.

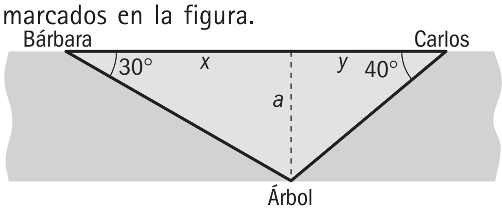


ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. El triángulo *ABC* es rectángulo en *A*, y el segmento *AH* es perpendicular a la hipotenusa *BC*. Determina la longitud de todos los segmentos que hay en la figura.



2. Bárbara y Carlos quieren determinar la anchura de un canal. Se sitúan en una orilla separados 50 metros uno del otro. Desde su posición observan un árbol en la orilla opuesta y miden con un teodolito los ángulos marcados en la figura.



a) Observa que puedes expresar $\text{tg } 40° = \dfrac{a}{y} \Rightarrow y = \dfrac{a}{\text{tg } 40°}$. ¿Por qué se cumple esto?

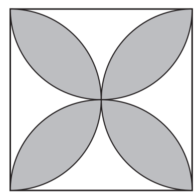
b) Expresa de forma análoga la longitud del segmento *x*.

c) Como sabemos que $x + y$ es igual a 50 metros, ¿cuántos metros mide de ancho el canal?

d) ¿A qué distancia de cada niño está el árbol?

e) ¿Cuál es el área del triángulo que definen Bárbara, Carlos y el árbol?

3. El lado del cuadrado mide 5 centímetros. Determina el área de la zona gris y de la zona blanca de la figura.
Como ayuda, traza las diagonales y divídela en cuatro partes iguales.

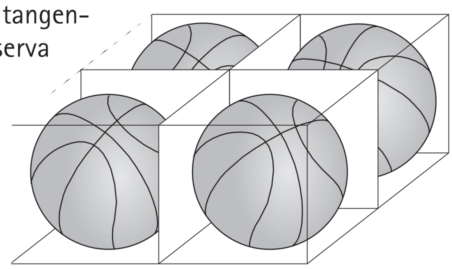


4. Tenemos tres recipientes, uno de forma esférica, otro de forma cilíndrica y el tercero de forma cónica. Todos tienen la misma altura, y el radio de la esfera es igual que los radios de las bases del cilindro y del cono.

a) ¿Qué ocurriría si vertiéramos el contenido de los recipientes esférico y cónico en el recipiente cilíndrico? ¿Cabría todo el contenido o sobraría algo?

b) ¿Cuál es mayor, la superficie lateral del cilindro o la superficie esférica?

5. Se meten cuatro balones iguales en una caja, de manera que cada uno es tangente a los dos que tiene a su lado y a cuatro caras de la caja, como se observa en la figura. La arista de la base de la caja es de 48 centímetros.
Calcula los siguientes datos.



a) El radio del balón.

b) El área de la superficie exterior de cada balón.

c) El volumen que ocupan los cuatro balones.

d) La relación o cociente que hay entre el volumen ocupado por los balones y el volumen del espacio libre que queda en la caja.

6. La base de la gran pirámide de Keops es un cuadrado de aproximadamente 230 metros de lado. Las caras laterales tienen una inclinación respecto del plano horizontal de 52°.

a) Determina con estos datos su altura.

b) ¿Qué superficie tiene cada una de las caras laterales triangulares?

c) ¿Cuál es el volumen de la pirámide?

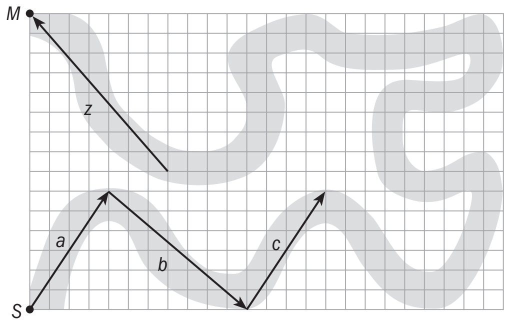
d) Si suponemos que fuera totalmente maciza de piedra y teniendo en cuenta que la densidad de la piedra es aproximadamente de 2,5 gramos por centímetro cúbico, ¿cuántas toneladas pesaría la gran pirámide de Keops?

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Dados los puntos $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(4, 0)$, $D(4, 5)$ y $E(1, 5)$:

a) Representa los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{EA}$. **b)** Determina sus coordenadas y calcula sus módulos.

2. Partiendo del punto de salida S, traza el menor número posible de vectores para llegar a la meta M sin salirte en ningún caso del circuito. Indica las coordenadas de cada uno de los vectores que has dibujado y calcula la suma de todos ellos considerados como vectores libres.

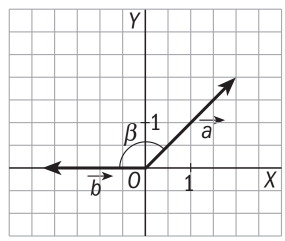


3. Dados los vectores $\vec{u} = (-3, 2)$ y $\vec{v} = (4, 1)$, determina:

a) Tres combinaciones lineales cualesquiera de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calculando las coordenadas de los vectores obtenidos.
Por ejemplo, $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v} = 2 \cdot (-3, 2) + (4, 1) = (-2, 5)$

b) La combinación lineal que hay que hacer con los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para obtener el vector $\vec{x} = (7, 32)$.

4. Determina:



a) El módulo de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

b) El ángulo β que forman.

c) El producto escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tanto por la expresión analítica como por la definición.

5. Una hormiga camina en línea recta por un plano que tiene unos ejes de coordenadas cartesianas. El rumbo que lleva siempre es el mismo, cada tres cuadros que avanza hacia la derecha, baja dos cuadros. Si en un instante la hormiga está pasando por un punto de coordenadas $(120, -8)$, determina:

a) ¿Cuál es la ecuación general de la recta que recorre la hormiga?

b) Si otra hormiga camina por la recta de ecuación $x + y - 73 = 0$, ¿cuál es el único punto donde es posible que se encuentren?

6. La pendiente de una recta es $m = \frac{-2}{5}$, y su ordenada en el origen es $n = 13$.

a) Escribe la ecuación explícita de la recta.

b) Determina dos puntos de la recta de coordenadas enteras.

c) Transforma la ecuación y escribe la ecuación general con coeficientes enteros.

d) Indica el vector director de la recta.

e) ¿Qué ángulo forma la recta con el eje de abscisas?

7. La ecuación paramétrica de una recta es $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$. Para $t = -2$ y para $t = 8$ obtenemos dos puntos que son los extremos del segmento AB. Calcula:

a) Las coordenadas de los puntos A y B.

b) La longitud del segmento AB.

c) Las coordenadas del punto medio del segmento AB.

d) ¿Para qué valor del parámetro t se obtiene el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas?

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Las dimensiones de un folio son, aproximadamente, 30 centímetros de ancho y 20 centímetros de alto. Si lo doblas por la mitad, obtienes un nuevo rectángulo con una nueva área.

Completa la tabla siguiente con las áreas de los rectángulos obtenidos al ir repitiendo el proceso.

	R1	R2	R3	R4	R5	...	R10
Área	600	300				...	

2. Escribe el término general de las siguientes sucesiones.

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

b) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

d) 0,1; 0,01; 0,001; ...

3. Un atleta quiere recuperar su forma ideal, por lo que sale a entrenarse todas las mañanas. El peso que pierde con un entrenamiento de 4 horas diarias sigue la expresión $\frac{1000}{2n}$ gramos, siendo n el número de días transcurridos desde que comenzó a entrenar.

a) ¿A partir de qué día perderá menos de 50 gramos?

b) ¿Qué crees que pasará en el futuro?

4. De las siguientes sucesiones sabemos que tres son convergentes y otras tres son divergentes.

$$a_n = \frac{2n+1}{2n-1} \qquad b_n = \frac{100}{2n} \qquad c_n = \frac{7n}{10} \qquad d_n = 0{,}03n \qquad e_n = \frac{(1000+n)\cdot n}{1000n^2} \qquad f_n = \frac{3n^2}{5n}$$

Escribe las tres convergentes.

5. Sabemos los límites de las sucesiones a_n, b_n, y c_n.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 7 \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{7} \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n = 49$$

Identifica cada sucesión con su límite correspondiente.

$\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n$	$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$	$\lim_{n\to+\infty} a_n - c_n$	$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{a_n}$	$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n$

1	$\frac{50}{7}$	-42	49	7

6. Sabiendo que el número e, o constante de Euler, vale 2,71828182845..., indica cuál ha de ser el valor de n para que la diferencia entre dicho número y la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sea:

a) Menor que una décima.

b) Menor que una centésima.

7. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2+2}$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+2n}{5n} - \frac{1}{2n}\right)$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n}$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$

ACTIVIDADES DE REFUERZO

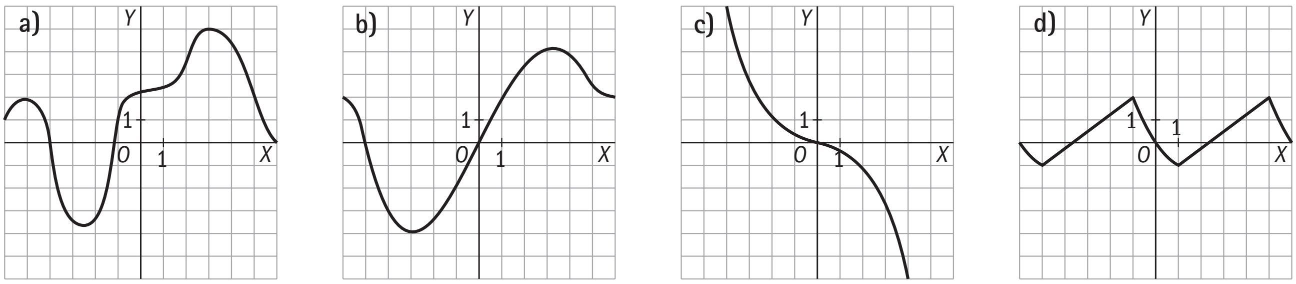
1. Expresa de manera algebraica la función que asigna a cada número real los siguientes valores.

a) Su raíz cuadrada positiva menos dos veces su triple.

b) Su mitad.

2. Representa gráficamente la función del apartado b del ejercicio anterior. Indica si es creciente o decreciente.

3. Relaciona cada gráfica de función con sus características.



I. Creciente en el intervalo $(-3, 3)$.

II. Acotada y periódica.

III. Impar y decreciente en todo su dominio.

IV. Máximo absoluto en $x = 3$.

4. Representa gráficamente la función:

$$y = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -2 \\ 0 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

5. El ciclo lunar dura 28 días, en los que la Luna pasa por sus cuatro fases: luna nueva, cuarto creciente, luna llena y cuarto menguante. Completa la tabla con la fracción de superficie lunar que se ve desde la Tierra durante 84 días y representa la gráfica de la función que relaciona el día con la fracción de Luna que vemos desde la Tierra.

Día	0	7	14	21	28	35	42	49
Fracción	0							

¿Se trata de una función periódica? Indica el período.

6. Relaciona cada función con el estudio de sus simetrías.

a) $y = (x - 1)^2$	No tiene
b) $y = x^3 - x^2 + x - 1$	Impar
c) $y = x^3$	Par

7. Dibuja de forma aproximada tres gráficas que cumplan con las siguientes condiciones:

a) Que sea siempre creciente y presente una discontinuidad.

b) Que sea periódica y no sea continua.

c) Que sea creciente, continua, y su recorrido sea el conjunto de todos los números positivos.

8. Aitor tiene que alquilar un coche y recibe dos ofertas distintas.

OFERTA *A*: 30 € EL PRIMER DÍA Y 15 € MÁS POR CADA DÍA DE ALQUILER.
OFERTA *B*: 18 € CADA DÍA.

Indica los intervalos de días en los que es mejor cada oferta.

11 Límites de funciones. Continuidad

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Calcula los límites laterales de estas funciones en el punto $x = 3$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ **b)** $g(x) = \sqrt{x-3}$ **c)** $h(x) = (x-3)^2$ **d)** $j(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$

Indica qué funciones tienen límite en dicho punto.

2. Ayudándote de la calculadora, completa la siguiente tabla de valores.

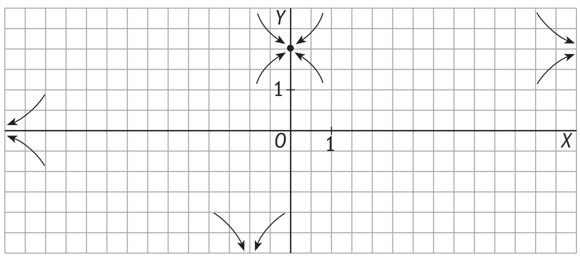
x	3,1	3,01	3,001
$f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$			

¿Se puede decir que existe el límite de la función en $x = 3$? Justifica la respuesta.

3. En las siguientes fichas han desaparecido algunos de los resultados de algunos límites. Utilizando los resultados visibles, completa el resto.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) =$	$\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} w(x) =$
$\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + h(x)) =$	$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{h(x)} = \text{ind}$	$\lim\limits_{x\to\infty} (g(x) - h(x)) =$	$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{w(x)}{h(x)} = 0$

4. En la siguiente gráfica se ha marcado la tendencia de la función en $-\infty$, -1, 0 y ∞.



Dibuja la gráfica de una función continua que se ajuste a la situación descrita.

5. Relaciona con flechas límites, indeterminada, forma de resolverse y resultado del límite.

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-4}{x}\right)^{x-1}$	$\dfrac{k}{0}$	Se descomponen en factores el numerador y el denominador, y se simplifica.	-3
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-4}{x^2}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	Se calculan los límites laterales.	-4
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-4x}{2-x^2}$	$\dfrac{0}{0}$	Si $\lim\limits_{x\to\infty} B(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = \infty \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} B(x)^{\alpha(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x)(B(x)-1)}$	∞
$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$	1^{∞}	Se dividen numerador y denominador por la máxima potencia de la fracción.	e^{-4}

6. Dada la función $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.

a) ¿Es continua en todo **R**?

b) En caso de ser discontinua, indica en qué puntos lo es.

c) ¿Existe el límite de la función en los puntos donde es discontinua?

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Las siguientes situaciones representan casos de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa. Indica cuál representa a cada uno y escribe también la fórmula de la función que refleja cada situación.

a) El tiempo de llenado de una bañera es 50 segundos dividido entre el número de grifos que se abran para llenarla.

b) Para preparar un cumpleaños, el anfitrión decide que va a comprar una barra de pan por cada tres invitados.

c) El número de días que tarda en germinar una flor equivale al doble de días que se riegue.

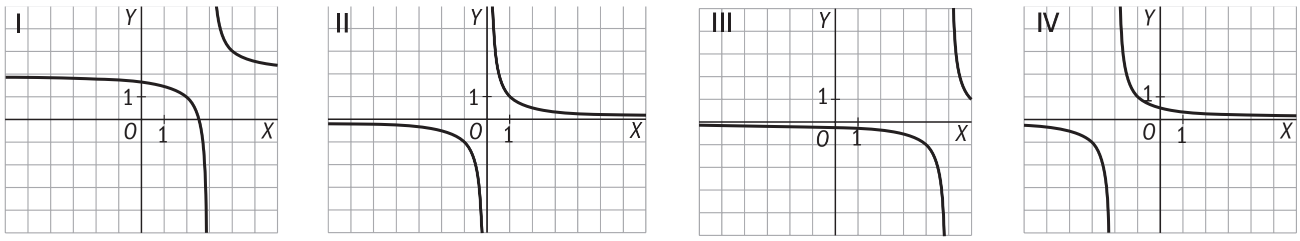
2. Un jugador de fútbol lanza un libre directo que se cuela en la portería *describiendo una perfecta parábola*, según el locutor de radio. Resulta que, una vez estudiada con un ordenador, la trayectoria del disparo se ajusta a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

a) ¿Tiene razón el locutor?

b) De ser así, ¿en qué punto cambia el balón su trayectoria, sorprendiendo al portero?

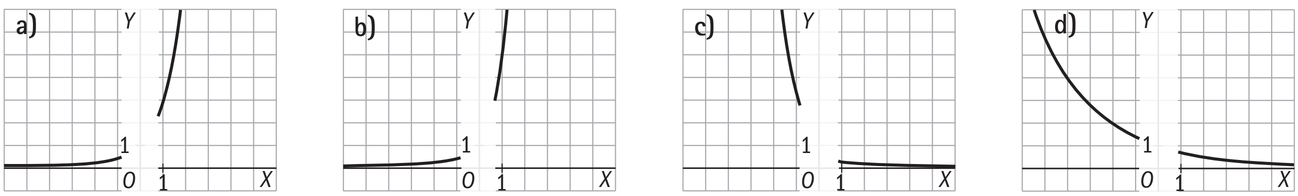
3. Asocia cada gráfica de función con su correspondiente fórmula. Justifica cada asociación.

a) $y = \dfrac{1}{x}$ **b)** $y = 2 + \dfrac{1}{x - 3}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x + 2}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x - 5}$



4. A la hora de imprimir las gráficas de varias funciones de la forma $y = a^x$ ha habido un error con la impresora y aparece una franja borrosa sobre el eje *OY*. Completa las gráficas y elige un valor para a de entre los siguientes.

$a = 0,7$ $a = 0,3$ $a = 3$ $a = 5$



5. Completa, con ayuda de la calculadora, la siguiente tabla.

	−2	−1	0	1	2	4
$f(x) = 2^x$						
$g(x) = \log_2 x$						

a) Representa las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log^2 x$ sobre los mismos ejes.

b) ¿Existe alguna relación entre las dos gráficas? ¿Y entre las dos funciones?

13 Iniciación a la derivada

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. La tasa de variación media de la función $f(x)$ en el intervalo [0, 3] es 4. ¿Cuál es el valor de $f(3)$ si $f(0) = 4$?

2. La siguiente tabla muestra la evaluación de una etapa de contrarreloj de la vuelta ciclista.

	15 km	30 km	45 km	60 km
Ciclista 1	12′ 30″	25′ 00″	37′ 30″	50′ 00″
Ciclista 2	15′ 15″	25′ 00″	35′ 00″	46′ 45″

Calcula la tasa de variación media de cada uno de los ciclistas en los siguientes intervalos.

a) [0, 15] **b)** [15, 30] **c)** [30, 45] **d)** [45, 60]

3. En los siguientes ejercicios se ha calculado la derivada de una función en un punto. Completa los huecos que faltan y asócialos con su ficha correspondiente.

a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2-(1+h)-(\qquad)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\qquad}{h} =$

b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1+h}-\dfrac{1}{1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\qquad}{\qquad} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\qquad}{h+1} =$

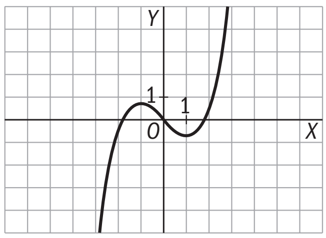
c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(\qquad)^2-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2-2h}{\qquad} =$

I) Derivada de $f(x) = (x-1)^2$ en 0

II) Derivada de $f(x) = x^2 - x$ en 1

III) Derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = -1$

4. Se sabe que la pendiente de la tangente a la función de la gráfica en el punto 0 es -1.



Escribe la ecuación de la tangente.

5. Calcula la función derivada de las siguientes funciones.

a) $y = x^3$

b) $y = 4x^3 - 4x$

c) $y = \text{sen } x \cdot \cos x$

d) $y = \dfrac{x^3}{x^2}$

6. Escribe dos funciones lineales que tengan la misma derivada. ¿Qué característica tienen en común?

7. En las siguientes derivadas se han cometido varios fallos. Indica dónde están y realiza correctamente las derivadas.

a) $y = \dfrac{x^2-4x-1}{x^3} \Rightarrow y' = \dfrac{(2x-4)\cdot x^3 + 3x(x^2-4x-1)}{3x^2}$

b) $y = (x^3 - 1) \cdot \text{sen } x \Rightarrow y' = 3x \cdot \text{sen } x - (x^3 - 1) \cdot \cos x$

14 Estadística unidimensional

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. De las siguientes variables estadísticas, señala cuáles son discretas y cuáles son continuas.

a) El número de calzado de los alumnos de una clase.

b) El peso de cada naranja que produce un naranjo.

c) La distancia saltada por los participantes en salto de longitud.

d) El valor que ha tenido el Euribor a lo largo de un año.

2. Tres amigos han apuntado las notas de sus exámenes de Matemáticas. Indica qué nombre corresponde a cada lista de notas ayudándote de la información que aparece en esta conversación.

Pablo: "Mi nota media ha sido de 6,5". Antonio: "Yo no he conseguido superarte". Carlos: "Pues yo sí".

4 5,5 8 7 4 7 5	8 5,5 6 7,5 6 7 9	7,5 7 6,5 7,5 5 5 6,5
Nombre:	Nombre:	Nombre:

3. El número de hermanos que tienen los alumnos de una clase es el siguiente.

7 alumnos son hijo único. 10 tienen un hermano. 8 tienen dos hermanos. 5 tienen más de dos hermanos.

Representa el número de hijos de cada familia en un diagrama de barras y en un diagrama de sectores.

4. Para entrar a la Facultad de Medicina es necesario realizar 5 exámenes, cada uno correspondiente a una especialidad. Dos compañeros, Juan y Santiago, han realizado dichos exámenes, y estas son las notas obtenidas.

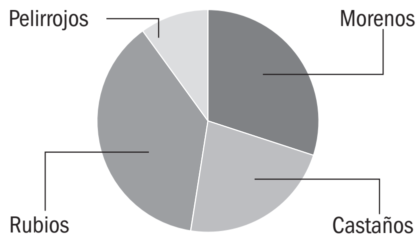
Juan: 2, 8, 5, 9 y 1 Santiago: 6, 4, 5, 5 y 5

a) Calcula la media de ambos alumnos.

b) Al salir las notas, Juan ha sido admitido, pero Santiago no. ¿Qué parámetro crees que ha utilizado el tribunal para aceptar a un alumno y al otro no?

5. El siguiente diagrama representa la distribución que tiene el color de pelo de los alumnos de una clase.

Sabiendo que el total de alumnos es de 40 y con ayuda del transportador, calcula cuántos alumnos hay con cada color de pelo.



6. Las estaturas, en centímetros, de 45 alumnos son las siguientes.

174 167 182 174 167 170 165 170 176 166 168 169 181 162 170
174 181 164 177 161 173 166 174 177 169 163 183 175 176 168
179 170 173 165 176 177 170 174 165 172 168 162 183 173 171

a) Completa la siguiente tabla.

	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2 \cdot f_i$
[160,164)						
[164,168)						
[168,172)						
[172,176)						
[176,180)						
[180,184)						

b) Cuál es la media y la desviación típica.

c) Representa el histograma.

15 Estadística bidimensional

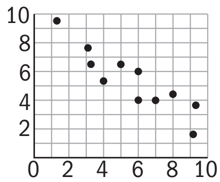
ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Completa la siguiente tabla, que muestra los resultados de una encuesta sobre las veces al mes que los habitantes de una ciudad van al cine y al teatro.

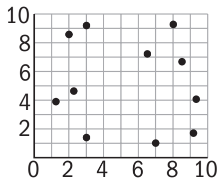
Cine/Teatro	0 veces	1 vez	2 veces	3 o más	TOTAL
0 veces	10		7	5	30
1 vez	8	5		1	18
2 veces	5	6	2		13
3 o más		4	1	0	9
TOTAL	27	23	14	6	

2. Relaciona cada nube de puntos con su variable aleatoria bidimensional y con su coeficiente de correlación.

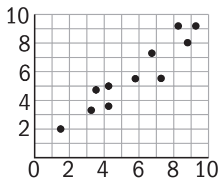
I.



II.



III.



a. Horas de trabajo de una máquina / N.º de piezas producidas

b. Horas de estudio en casa / N.º de suspensos

c. Notas en Matemáticas / Tiempo en llegar al centro escolar

i. $r = -0{,}82$

ii. $r = 0{,}98$

iii. $r = 0{,}03$

3. Los siguientes pares de puntos representan las notas de 12 alumnos en Matemáticas y Física, escritos en este orden.

(2, 1) (3, 3) (4, 2) (4, 4) (5, 4) (6, 4)

(6, 6) (7, 4) (7, 6) (8, 7) (10, 9) (10, 10)

a) Representa mediante una nube de puntos los datos obtenidos en el estudio.

b) ¿Crees que hay relación entre ambas variables?

c) Calcula la media y la desviación típica de las notas de Matemáticas y de las de Física.

d) Calcula el centro de gravedad, la covarianza de la distribución conjunta.

e) Calcula el coeficiente de regresión.

4. La jefatura de estudios ha encargado al departamento de matemáticas un estudio mediante el cual se relacione el rendimiento académico con el absentismo escolar. En la siguiente tabla, la variable X representa el número de materias aprobadas, mientras que Y representa las faltas de asistencia de seis alumnos escogidos al azar.

Aprobados	7	6	5	3	1	0
Faltas de asistencia	5	15	23	29	41	55

Indica, calculando el coeficiente de variación, si hay relación entre ambas variables.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Completa con números el crucigrama.

HORIZONTALES:

1. $\frac{5!}{4!}$; $C_{70,\,2}$ **2.** $VR_{4,\,8}$ **3.** $V_{5,\,2}$; P_5

4. Tercer elemento de la fila décima del triángulo de Pascal; $1! - 0!$

5. $\frac{7!}{6!}$; $C_{7,\,4} - C_{3,\,2}$ **6.** $C_{12,\,3}$; $C_{5,\,3}$

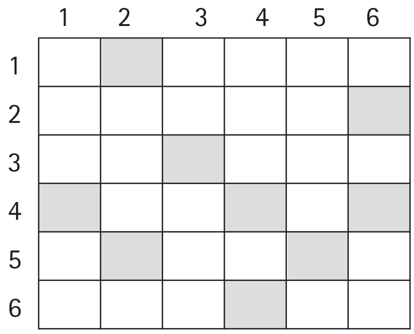
VERTICALES:

1. $C_{35,\,2} - VR_{2,\,5} - 0!$; $C_{13,\,2} - P_3$ **2.** $C_{15,\,2} + VR_{7,\,2}$; $2!$

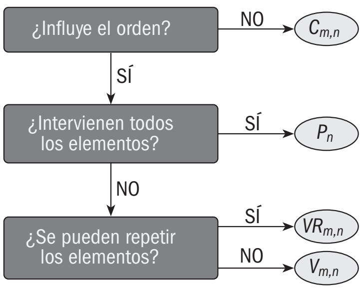
3. $VR_{5,\,2}$; $VR_{5,\,4} - VR_{10,\,2} + 5$

4. Valor de x distinto de 4 que cumple: $\binom{435}{4} = \binom{435}{x}$; $2!$

5. $C_{35,\,2} - VR_{2,\,5} + 99$; $0!$ **6.** $3! - 0!$; $C_{6,\,3}$



2. Las tarjetas utilizadas en los cajeros automáticos tienen asociada una clave de cuatro cifras. Para saber cuántas claves distintas existen, primero vamos a reconocer el tipo de configuración a partir de tres preguntas clave:



¿Influye el orden en el que colocamos los elementos?
Sí importa el orden. La clave 1234 es distinta de la clave 2134.

¿Intervienen todos los elementos en todas las configuraciones?
No intervienen todos los elementos en las configuraciones, ya que son códigos de cuatro cifras y el número de elementos disponibles es 10: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

¿Pueden repetirse los elementos en una misma configuración?
Sí que pueden repetirse. Por ejemplo, 2232 es una clave.

Son, por tanto, variaciones con repetición de 10 elementos tomados de cuatro en cuatro: $VR_{10,\,4} = 10^4 = 10\,000$. Existen 10 000 códigos.

Ahora contesta a las siguientes preguntas siguiendo un esquema como el anterior:

a) Si no se pudieran repetir las cifras, ¿cuántos códigos existirían?

b) ¿Cuántos códigos existen con las cifras 1, 2, 3 y 4, sin repetirlas?

3. Para abrir una cuenta de correo electrónico necesito una dirección que debe tener 6 caracteres. Para formarla se pueden utilizar las 26 letras minúsculas del alfabeto (excepto la *ñ*, porque no está en los alfabetos de otros idiomas), las cifras del 0 al 9, los guiones y los guiones bajos.

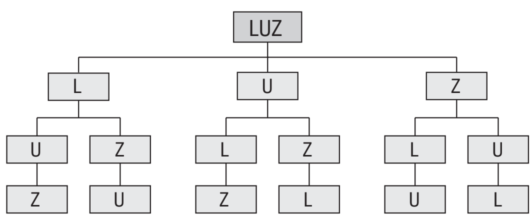
a) ¿Cuántas posibles direcciones existen?

b) Si actualmente hay 200 millones de usuarios registrados, ¿cuántas direcciones quedan sin utilizar?

4. Un anagrama es una palabra formada con las letras de otra; por ejemplo, ZUL es un anagrama de LUZ. Observa el diagrama en árbol: por ejemplo, si la primera letra es *L*, entonces la segunda y tercera no podrán ser *L*.

a) ¿Cuántos anagramas tiene la palabra LUZ?

b) Halla cuántos anagramas tiene tu nombre.



ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Completa las siguientes frases, referidas al experimento que consiste en lanzar un dado cúbico.

a) El conjunto de todos los resultados posibles es $E = \{$__________$\}$ y recibe el nombre de __________.

b) El suceso $A = \{3\}$ es uno de los resultados posibles y se llama __________.

c) Un suceso $B = \{\textit{sacar un } 7\}$ se llama suceso __________.

d) El suceso $C = \{$__________$\}$ se llama __________ y está formado por todos los números impares.

e) El suceso contrario del suceso $D = \{1, 2, 4, 5\}$ es __ $= \{$__________$\}$.

f) El suceso $F = A \cup D = \{$__________$\}$ se llama __________, y el suceso $G =$ __________ $=$
$= \{$__________$\}$ se llama intersección de los sucesos A y D.

g) Como $G = \varnothing$, se dice que A y D son sucesos __________.

2. Halla la probabilidad de que al lanzar dos dados cúbicos se obtengan los siguientes resultados.

a) El primer resultado sea 4.

b) La suma sea 6.

c) El producto sea 12.

d) El primer resultado sea 2, y el segundo, impar.

Para resolver este problema, completa la tabla siguiente.

Sucesos	Casos favorables	N.º de casos favorables	N.º de casos posibles	Probabilidad
a)	(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)	6	36	$\frac{6}{36} = 0{,}17$
b)				
c)				
d)				

3. En un concurso de televisión hay una piscina con bolas blancas, rojas y azules. Cada una de las bolas está numerada con el número 1 ó 2. El presentador le dice al concursante que debe elegir una bola y un número (por ejemplo, azul y 2) y, con los ojos vendados, sacar una bola de la piscina. Si acierta el color y el número, se lleva 6000 euros; si solo acierta el número, 2000, y si solo acierta el color, gana 3000 euros. La cantidad de bolas de cada color y número viene dada por la siguiente tabla.

	Blanca	Roja	Azul	Total
1	120	90	100	
2	80	120	80	
Total				

El concursante elige *blanca y 2*. Completa la tabla y responde a las siguientes preguntas.

a) ¿Qué probabilidad tiene de ganar algún premio el concursante?

b) ¿Qué habrías apostado tú para ganar los 6000 euros?

4. Un ratón entra en el laberinto del dibujo con el objetivo de comerse un queso. Cuando llega a una bifurcación, la probabilidad de elegir un camino u otro es la misma. Halla la probabilidad de que el ratón llegue a comerse el queso y la probabilidad de que caiga en la trampa.