Resolución de problemas

- **Resolución de problemas.**
- **Elección de incógnitas.**
- **Planteo de ecuaciones.**
- **Tipos de problemas.**

«Hic Diophantus habet tumulum, qui tempora vitae illius mira denotai arte tibi:
Egit sextantem juvenis; lanugine malas vestire hinc coepit parte duodecima; septante uxori post haec sociatur et anno formosus quinto nascitur, vide, puer.
Heminam aetatis postquam attigit ¡lle paternae, infelix, subita morte peremptus, obit.
Quattuor aestates genitor lugere superstes.
Cogitur hinc annos illius assequere».

La historia ha conservado pocos rasgos biográficos del gran matemático griego Diofanto. que vivió en el siglo III. Unos versos latinos que figuran en su sepulcro nos revelan los años y principales circunstancias de su vida. La autora de estos versos, según algunos historiadores, es Hipatia, considerada la primera mujer matemática de la historia y contemporánea de Diofanto.

Reproducimos aquí la inscripción y su traducción:

«Aquí Diofanto tiene el sepulcro, el cual las épocas de la vida de aquél, con arte admirable, te señala:
Joven pasó la sexta parte; de vello sus mejillas
comenzó a cubrir, a partir de aquí, una duodécima parte;
una séptima parte, después de esto, se casa, y al año quinto he aquí que nace un hermoso niño.
Después que éste llegó a la mitad de la edad paterna muere el desgraciado, arrebatado por una súbita muerte.
Cuatro veranos le sobrevive su padre para llorarlo.
De donde,concluyese, alcances a saber los años de aquél».

Éste y otros problemas parecidos trataremos de resolverlos por medio de ecuaciones y sistemas ya estudiados. Todo el esfuerzo que hay que hacer en esta lección es traducir al lenguaje algebraico los datos.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En todo problema existen unas cantidades conocidas llamadas **datos**, y otras desconocidas, llamadas **incógnitas.** *Resolver un problema es hallar las incógnitas por medio de relaciones o ecuaciones matemáticas.*

Se leerá el problema detenidamente cuantas veces sea necesario hasta comprender perfectamente su significado.

A veces resulta de gran utilidad ayudarse de un esquema, diagrama o gráfico.

Solamente la práctica es capaz de enseñar problemas con esperanza de éxito; no obstante, en todo problema hay que recorrer estas etapas:

1. **Elección** de incógnitas.
2. **Planteo** de las ecuaciones.
3. **Resolución** de las ecuaciones o sistemas.
4. **Comprobación** de los resultados.
5. **Discusión** de las soluciones.

ELECCIÓN DE INCOGNITAS

Ya hemos dicho que las incógnitas son los valores desconocidos del problema que han de calcularse. Cada valor desconocido puede sustituirse por una letra, pero hay que tener presente que bastantes veces estos valores están relacionados entre sí. Esto hace que el número de incógnitas pueda disminuir con la consiguiente reducción del número de ecuaciones y facilidad en la resolución de las mismas.

A continuación ponemos una tabla, que relaciona el lenguaje ordinario en que vienen dadas las incógnitas y su traducción al lenguaje algebraico.

Hallar un número	x
Dados dos números	x, y
Dados dos números consecutivos	x, x + 1
Tres números consecutivos	x, x + 1, x + 2 ó x —1, x, x + 1
Dos números pares consecutivos	2x, 2x +2
Tres números pares consecutivos	2x, 2x+ 2, 2x + 4 ó 2x —2, 2x, 2x + 2
Dos números impares consecutivos	2x + 1, 2x + 3
Tres números impares consecutivos	2x + 1, 2x + 3, 2x+5 ó 2x — 1, 2x + 1, 2x + 3
Dos números, uno triplo del otro	x, 3x
Dos números, uno que excede a otro en 10	x, x+10
Dos números que difieren en 10.	x, x+10
Dos números, uno quinta parte de otro	x, 5x ó x, x/5
Dos números cuyo cociente es 4	x, 4x
Dos números cuya suma es 20	x, 20 —x
Un número y su cuadrado	x, x2
Dos números cuya razón es 3:4	3x, 4x
Tres nºs inversamente proporcionales a 4, 3 2	x/4, x/3, x/2
Un número de dos cifras	10x + y
Un número de tres cifras	100x +10y + z

PLANTEO DE ECUACIONES

Una vez elegidas las incógnitas, el segundo paso que hay que dar es plantear tantas ecuaciones como incógnitas hay, si el problema está determinado. El pasar del lenguaje ordinario a una ecuación ofrece a veces dificultad, y sólo la práctica proporciona la intuición del camino a seguir. Ponemos a continuación una tabla con los enunciados más frecuentes y su traducción a ecuaciones.

La suma de dos números es 10	$x + y = 10$
La diferencia de dos números es 10	$x — y = 10$
El producto de dos números es 10	$xy = 10$
El cociente de dos números es 10	$x/y=10$
La suma de los cuadrados de dos números es 100	$x^2 + y^2 = 100$
La diferencia de los cuadrados de dos números es 100	$x^2 — y^2 = 100$
La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 10	$x^2 + y^2 = 100$
La suma de dos números consecutivos es 20	$x + (x +1) = 20$
La suma de tres números consecutivos es 30	$x + (x + 1) +(x + 2) = 30$
La suma de dos números impares consecutivos es 32	$(2x+1)+(2x + 3) = 32$
La suma de dos números pares consecutivos es 60	$(2x) + (2x + 2) = 60$
La suma de tres múltiplos de 3 consecutivos es 99	$(3x)+(3x+3) + (3x+6) = 99$
La suma de dos números proporcionales a 3 y a 4 es 35	$4x + 3x = 35$
La suma de tres números proporcionales a 4, 3 y 2 es 45	$4x + 3x + 2x = 45$
El cociente entero de dos números es 3 y su resto 4	$x = 3y + 4$
El número de páginas que hay en x libros si cada libro tiene y páginas es 2.400	$xy = 2\,400$

TIPOS DE PROBLEMA

Este apartado, consistirá en el planteamiento del problema, ya que la solución de las ecuaciones o sistemas .Se proponen algunos tipos de problemas que consideramos más frecuentes y asequibles a los conocimientos de los alumnos

Problemas sobre números
Problemas sobre edades
Problemas sobre magnitudes
Problemas sobre mezclas y aleaciones
Problemas sobre fuentes y obreros
Problemas sobre móviles
Problemas sobre relojes
Problemas de geometría

Problemas sobre números

Incluimos en este tipo los problemas relativos a números y los que se reducen a éstos cuando se hace abstracción de las unidades.

Ejercicios resueltos

Determinar dos números pares consecutivos cuyo producto es 2024.

Dos números pares consecutivos: $2x$, $2x + 2$ Su producto es 2024,

luego: $2x\,(2x+2) = 2\,024$

$4x^2 + 4x - 2\,024 = 0 \iff$

$x^2+x-506 = 0$, resolviendo la ecuación las soluciones son: $x = 22$, $x=-23$

Para $x= 22$ se tienen los números: 44, 46

Para $x=-23$ se tienen los números: —46, —44

Puesto que el enunciado no indica si se trata de números naturales o enteros se pueden admitirlas dos soluciones.

En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres, y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Hallar el número de mujeres, de hombres y de niños que hay en la reunión, si el total es 156.

Éste es un problema típico en el que el planteamiento es básico para una rápida solución.

Lenguaje ordinario	*Lenguaje algebraico*
En una reunión hay hombres........................	x
Doble número de mujeres que de hombres..	$2x$
Y triple número de niños que de mujeres y hombres juntos	$3(x + 2x)=9x$

En total hay 156

Por tanto: $x +2x+9x=156 \iff$

$2x = 156 \iff$

$x=13$

Solución: Número de hombres: $x=13$

Número de mujeres: $2x = 26$

Número de niños: $9x = 117$

El número de hombres, mujeres y niños que asisten a una reunión es directamente proporcional a 1, 2 y 9. Halla el número de cada uno, si el total es 156.

Este problema es igual al anterior. Sólo cambia el enunciado.

Descomponer el número 48 en dos partes tales que dividiendo una por otra, se obtenga de cociente 3 y de resto 4.

Sea *x* el dividendo e y el divisor, entonces se tiene el sistema:

$$\begin{cases} x+ y = 48 \\ x = 3y + 4 \qquad (D = dc + r) \end{cases}$$

La solución es: $x = 37$, $y = 11$.

Problemas sobre números

1. Hallar dos números cuya suma es 78 y su producto 1 296.
2. Hallar dos números cuya suma es 14 y la suma de sus cuadrados 100.
3. En un corral hay conejos y gallinas, que hacen un total de 61 cabezas y 196 patas. Hallar el número de conejos y gallinas
4. El cociente de una división es 3 y el resto 5. Si el divisor disminuye en 2 unidades, el cociente aumenta en una unidad y el resto nuevo es 1. Hallar el dividendo.
5. Dividir 473 en dos partes de modo que al dividir la mayor por la menor se obtenga 7 de cociente y 9 de resto.
6. Descomponer el número 4371 en tres sumandos inversamente proporcionales a los números 3, 4 y 5.
7. En una proporción el producto de los medios vale 96 y la suma de los mismos, 20. Hallar los 4 términos de la proporción sabiendo que los extremos de la misma suman 35.
8. En una reunión de chicos y chicas, el número de éstas excede en 26 al de aquéllos. Después de haber salido 15 chicos y 15 chicas, quedan triple de éstas que de aquéllos. Hallar el número de chicos y chicas que había en la reunión.
9. Hallar un número de dos cifras igual al triple del producto de ellas, sabiendo que la diferencia entre las cifras de las unidades y las decenas es 4
10. La suma de dos números es 18 y la suma de sus inversos 9/40. Hallar los números.
11. Las tres cifras de un número suman 18. Si de ese número se le resta el que resulta orden de sus cifras, se obtiene 594; la cifra de las decenas es media aritmética dos. Hallar dicho número.
12. ¿Qué número se debe sumar a 17, 11, 29 y 20 para que con los 4 números resultantes escribirse una proporción?
13. Se ha repartido una cierta cantidad entre tres personas, proporcionalmente a los números 2, 3 y 5. A la tercera persona correspondieron 1,98 euros más que a la primera. Calcular la cantidad que correspondió a cada una y la cantidad total repartida.
14. Tres amigos juegan un décimo de lotería, que resulta premiado con 60000,00 de euros. Calcular cuánto corresponden a cada uno, sabiendo que el primero juega doble que el segundo y éste triple que el tercero.
15. Un padre deja al morir cierto capital, con la condición de que se reparta entre sus tres hijos proporcionalmente a sus edades, que son 10, 15 y 20 años. Las partes del hijo mayor y el menor suman 420,00 euros. Hallar lo que corresponde a cada uno y la cantidad heredada en total.
16. A una finca de regadío se le asignan mensualmente 42 horas, distribuidas entre los productores que la cultivan, proporcionalmente a la superficie que tienen cada uno a su cargo. El productor A tiene 1,5 Ha; el B 1 Ha y 40 áreas y el C, 70 áreas. Calcular las horas de riego que corresponden a cada uno.
17. En una carrera se designan 587,00 euros a premios a los tres primeros repartidas en proporción inversa al tiempo invertido. Los tiempos de los tres primeros son: 26 min, 29 min y 30 min. Calcular lo que corresponde a cada uno.

Problemas sobre edades

Constituyen un grupo muy clásico de problemas de álgebra cuyos enunciados, en algunos casos, son una verdadera muestra de ingenio, por no decir un trabalenguas.

En estos problemas hay que considerar tres tiempos: **presente**, **pasado** y **futuro**. Las relaciones entre los datos y las incógnitas se refieren siempre a éstos. Esquemáticamente:

PASADO	PRESENTE	FUTURO
Hace t años	Hoy	Dentro de t años
x-t	x	x+t
y-t	y	y+t
z-t	z	z+t

Ejercicios resueltos

La suma de las edades de un padre y sus dos hijos son 73 años. Dentro de 10 años la edad del padre será el duplo de la edad del hijo menor. Hace 12 años la edad del hijo mayor era el doble de la edad de su hermano. Hallar la edad de cada uno.

Teniendo en cuenta el esquema, podemos poner:

PASADO	PRESENTE	FUTURO
Hace 12 años	Hoy	Dentro de 10 años
x-12	Padre: x	x+10
y-12	Hijo mayor: y	y+10
z-12	Hijo menor: z	z+10

Con esta información, el planteamiento del problema es inmediato.

Hoy: $x + y + z = 73$
Dentro 10 años: $x + 10 = 2(z + 10)$
Hace 12 años: $y-12 = 2(z-12)$

Resolviendo el sistema se tiene:
Edad del padre: $x = 40$
Edad del hijo mayor: $y = 18$
Edad del hijo menor: $z = 15$

Pedro dice a Juan: «Yo tengo dos veces la edad que tu tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes, y cuando tú tengas la edad que yo tengo la suma de nuestras edades será de 63 años». Hallar la edad de cada uno.

PASADO	PRESENTE	FUTURO
Hace x-y años	Hoy	Dentro de x-y años
x-(x-y)=y	Pedro: x	x+(x-y)
y-(x-y)	Juan: y	y+(x-y)= x

«yo tenía la edad que tú tienes»; es lo mismo que eso sucedió hace x—y años; y que: «cuando tú tengas la edad que yo tengo» sucederá dentro de x —y años.

Por tanto, hace x —y años: $x = 2 [y — (x —y)]$
Dentro de x —y años: $x + (x — y) + x = 63$
La solución es:
Edad de Pedro: x = 28
Edad de Juan: y = 21

Problemas sobre edades

18. Un padre tiene 39 años y su hijo 15. ¿Cuántos años hace que la edad del padre era triple de la edad del hijo?
19. Hace 18 años la edad de una persona era el doble de la de otra: dentro de 9 años la edad de la primera será solamente los 5/4 de la de la segunda. Hallar las edades.
20. La edad de un niño será dentro de 3 años un cuadrado perfecto, y hace 3 años su edad era precisamente la raíz cuadrada de este cuadrado. Hallar los años que tiene.
21. Hallar las edades de un abuelo, un padre y un hijo sabiendo que en la actualidad la edad del abuelo es doble de la edad del padre, la de éste doble de la del hijo, y que hace un año sus edades sumaban 137 años.
22. Una señora tiene 70 años y su hijo 30. ¿Cuántos años hace que la madre tenía tres veces la edad del hijo?
23. Las tres cuartas partes de la edad de una persona A exceden en 15 años a la de B. Hace 4 años la edad de A era el doble de la de B. Hallar la edad de cada una.
24. Las edades de tres niños sumadas dos a dos de 6, 8 y 12, respectivamente. Hallar las edades.
25. Un padre dice a su hijo: hoy tu edad es 1/5 de la mía, y hace 5 años no era más que 1/9. Hallar las edades.
26. Una madre y sus dos hijos tienen en conjunto 60 años: hallar la edad de cada uno sabiendo que el hijo mayor tiene tres veces la edad del menor, y que la madre tiene el doble de la suma de las edades de sus hijos.
27. Preguntada una persona por su edad, contestó: «Sumad 25 al producto del número de años que tenía hace 5 años por el de los que tendré dentro de 5 años y os resultará un número igual al cuadrado de la edad que tengo hoy». Hallar la edad de dicha persona.
28. Preguntado un padre por la edad de su hijo, contesta: «Si del doble de los años que tiene se le quitan el triple de los que tenía hace 6 años se tendrá su edad actual». Hallar la edad del hijo.
29. La raíz cuadrada de la edad del padre nos da la edad del hijo, y dentro de 24 años la edad del padre será doble que la del hijo. Hallar las edades.
30. Un padre tenía 25 años cuando nació su hijo. La media geométrica de las edades de ambos supera en 10 al número de años del hijo. Hallar las edades actuales de ambos.

Problemas sobre magnitudes

En la mayoría de las ciencias existen muchas magnitudes cuya relación viene dada matemáticamente por

$xy = z$, siendo **x, y, z tres magnitudes.**

Veamos ahora la formulación en unas cuantas situaciones:

Velocidad x Tiempo	= Espacio
Base x Altura	= Área
Masa x Aceleración	= Fuerza
Libros x Precio	= Coste
Filas x Butacas-fila	= Aforo
Densidad x Volumen	= Masa
Potencia x Brazo	= Resistencia
Filas x Columnas	= Aforo de la clase
Alumnos x Cuota	= Precio excursión

Ejercicios resueltos

Pedro y Juan emplean 360 euros cada uno en comprar libros. El precio de los adquiridos por Juan excede, en 30 euros, al de los comprados por Pedro, quien ha comprado 2 libros más que Juan. Averiguar el precio de los libros adquiridos y cuántos son.

En este precio la ecuación fundamental que relaciona las magnitudes es: Libros x Precio = Coste

Con esto, la formulación del problema es la siguiente:

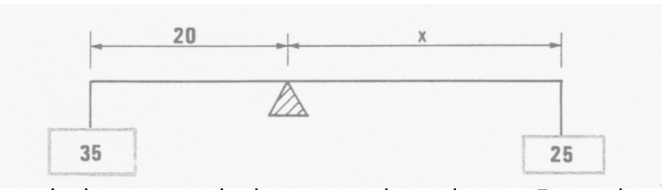
Libros x Precio = Coste

Pedro .... $x \cdot y = 360$

Juan .... $(x - 2) \cdot (y + 30) = 360$

Resolviendo el sistema de la solución es: Pedro compra 6 libros a 60 euros.
Juan compra 4 libros a 90 euros.

De los extremos de una palanca apoyada en un punto penden dos cuerpos de 35 kp y 25 kp de peso respectivamente. El peso de 35 kp actúa a una distancia del punto de apoyo de 20 cm. Para que el sistema se encuentre en equilibrio (palanca horizontal), ¿a qué distancia del punto de apoyo debe situarse el peso de 25 kp? Se considera que la palanca carece de peso propio.



La ley de las palancas, que relaciona potencia, brazo y resistencia, es: Potencia x brazo = resistencia

.... Primer cuerpo $35 \cdot 20 = R$

Segundo cuerpo $25 \cdot x = R$

$35 \cdot 20 = 25x$

Solución: La distancia vale $x = 28$ cm.

Problemas sobre magnitudes

31. Se importan del extranjero un cierto número de toneladas de una mercancía que ha de venderse a 800 euros tonelada. Por avería en el transporte se inutilizan 150 toneladas, y con objeto de que la ganancia en la venta sea la misma se vende cada tonelada del resto a 1.000 euros. Hallar las toneladas que se importaron.
32. Un comerciante compra por 16200 euros una partida de sacos de café. Una segunda partida le cuesta la misma cantidad, pero cada saco le cuesta 270 euros más, con lo que compra 2 sacos menos. Hallar el número de sacos y su precio.
33. Un grupo de estudiantes organiza una excursión, siendo su coste total 5400 euros. Al salir aparecen 6 estudiantes más, y esto hace que cada uno de los anteriores pague 30 euros menos. Hallar el número de estudiantes que fueron a la excursión y lo que pagó cada uno.
34. Un salón de actos de forma rectangular tiene capacidad para 800 personas, dispuestas en filas de igual número de butacas. Si se amplía en 5 asientos por filas, se eliminan 8 filas. Hallar el número de filas y de butacas en cada fila.
35. Una rueda dentada de 36 dientes engrana con otra de 48 dientes. Si la primera gira 100 revoluciones en un tiempo dado, ¿cuántas gira la segunda?
36. Dos poleas, acopladas por una correa, tienen 10 y 14 cm, respectivamente, de diámetro. Si la primera gira a 560 revoluciones por minuto, ¿a qué velocidad gira la segunda?

Problemas sobre mezclas y aleaciones

Problemas de mezclas

Si se tienen dos sustancias de distinta calidad, por ejemplo dos clases de vino o de café, podemos elegir una cantidad de cada una de ellas para obtener otra de calidad intermedia.

En esto consiste un problema de mezclas en el que intervienen, para dos sustancias:

- Cantidad de la primera sustancia: C_1 su precio: P_1
- Cantidad de la segunda sustancia: C_2, su precio: P_2
- Cantidad total: C su precio: P

Con esto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = C \\ C_1P_1 + C_2P_2 = C \cdot P \end{cases}$$

Ejercicios resueltos

Con dos clases de café de 9,00euros y 12,00 euros el kg se quiere obtener una mezcla de 10,00 euros kilogramo. Hallar la cantidad que hay que mezclar de cada clase para obtener 30 kg de mezcla.

Si x e y son las cantidades a tomar, resulta el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 9{,}00x + 12{,}00y = 30 \cdot 10{,}00 \end{cases}$$

La solución del sistema es: Café de 9,00 euros/kg: x = 20kg.

Café de 12,00euros/kg: y = 10 kg.

Problemas de aleaciones

Los problemas de aleaciones tratan de hallar las cantidades de metal que deben elegirse de dos lingotes de distintas leyes para obtener otro de una ley intermedia.

Recordemos que ley de una aleación *es la razón entre la cantidad de metal fino y la del total de los metales que intervienen en la aleación. La ley se suele dar en tanto por uno o en tanto por mil (milésimas).*

La resolución de estos problemas es similar al de las mezclas. Si

- C_1 es la cantidad del primer lingote y L_1 su ley
- C_2 es la cantidad del segundo lingote y L_2 su ley
- C la cantidad total y L su ley

Resulta: $C_1 + C_2 = C$

$C_1L_1 + C_2L_2 = C \cdot L$ (metal fino)

En estos problemas, si se mezcla un metal no fino su ley es 0.

Lo mismo sucede cuando se mezcla agua con vino, pues suponemos que el agua tiene de precio 0 euros.

Ejercicios resueltos

Un lingote de ley 0,85 que pesa 3 kg se funde con otro lingote de plata de ley 0,7, que pesa 2,5 kg. Hallar la ley del nuevo lingote.

Se tiene: $3 \cdot 0{,}85 + 2{,}5 \cdot 0{,}7 = (3 + 2{,}5) \cdot x$

siendo x la ley de la aleación.

La solución es $x = 0{,}78$

Un orfebre tiene dos lingotes: el primero contiene 540 gramos de oro y 60 de cobre, y el segundo 400 g de oro y 100 de cobre. ¿Qué cantidad deberá tomar de cada uno de ellos para formar otro lingote que pese 640 g y cuya ley sea 0,825?

Ley del primer lingote: 540/600 = 0,9.

Ley del segundo lingote: 400/600 = 0,8.

Con esto se tiene el siguiente sistema:

$x + y = 640$

$0{,}9x + 0{,}8y = 640 \cdot 0{,}825$

La solución del problema es: Metal del primer lingote x = 160.

Metal del segundo lingote y = 480.

Problemas sobre mezclas y aleaciones

37. Se han mezclado 27 kg de café cuyo precio es 8,50euros/kg con 33 kg de otra clase cuyo precio se desconoce. Averiguar este precio si se sabe que la mezcla habría de venderse a 8,28 euros/kg.
38. ¿Qué cantidad de agua hemos de añadir a 18 litros de una solución salina al 12% para rebajar su concentración al 5%?
39. Se tienen 400 Kg de agua salada al 28 por mil. ¿Qué cantidad de agua ha de evaporarse para que la disolución contenga 32 por mil de sal?
40. ¿En qué proporción habrá que mezclar café de 7,50 euros/kg con otro de 6,00 euros/kg para que vendiéndolo a 7,84 euros/kg se gane el 12% del precio de coste?
41. ¿Qué cantidad de agua se ha de añadir a 224 l de vino de 0,60 euros/l para poder rebajar el precio a 0,35 euros/l?
42. Se desea mezclar vino de 0,55 euros litro con otro de 0,40 euros litro de modo que la mezcla resulte a 0,45 euros litro. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 300 litros de la mezcla?
43. ¿Qué cantidad de plata pura es necesario añadir a 800 g de plata, de ley 800 milésimas, para obtener una aleación de ley de 900 milésimas?
44. ¿Cuántos litros de crema de leche con 35% de grasa habremos de mezclar con leche de 4% de grasa para obtener 20 litros de crema que tenga el 25% de grasa?
45. Dos líquidos de densidades 0,7 y 1,3 se mezclan, obteniéndose un líquido de densidad 0,9. Hallar la cantidad de líquido que hay que tomar de cada clase para formar una mezcla de 30 litros.
46. Se tienen tres lingotes compuestos del siguiente modo:

    El 1.° de 20 g de oro, 30 g de plata y 40 g de cobre.

    El 2.° de 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre.

    El 3.° de 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre.

    Se pide qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes anteriores para formar un nuevo lingote de 34 g de oro, 46 de plata y 67 g de cobre.
47. Hierón de Siracusa maridó hacer una corona de oro de 7465 g. Para conocer si el orfebre había reemplazado oro por plata, se la mandó a Arquímedes para que lo averiguara sin romperla. Arquímedes metió la corona en agua y perdió 467 g de su peso. Se sabe que el oro pierde en el agua 52/1000 de su peso y que la plata pierde 95/1 000 de su peso. Hallar los gramos de oro y plata de la corona real.

Problemas de fuentes y obreros

Estos problemas y otros semejantes se resuelven teniendo en cuenta estos principios:

Fuentes:

Lo que llena una fuente en una hora, más lo que llena otra en una hora, es lo que llenan las dos en una hora.

Obreros:

El trabajo realizado por un obrero en una hora, más el trabajo realizado por otro en una hora, es igual al trabajo realizado por los dos en una hora.

Si t_1 es el tiempo de la primera fuente (obrero), t_2 el de la segunda y t el tiempo total, se tiene:

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{t}$$

Ejercicios resueltos

Dos grifos tardan en llenar un estanque 18 horas. Hallar el tiempo en que lo haría cada uno, sabiendo que el primero, manando solo, tardaría en hacerlo 27 horas menos que el segundo.

Sea x el tiempo que tarda el primero y (x + 27) el tiempo que tarda el segundo, entonces:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{27+x}=\frac{1}{18}$$

Resolviendo la ecuación se tiene: El primero tarda x = 27 horas.
El segundo tarda x+27 = 54 horas.

Trabajando juntos, dos obreros tardan en hacer un trabajo 17 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerlo separadamente, si uno invierte el doble de tiempo que el otro?

Sea x el tiempo invertido por el primero y 2x por el segundo, entonces:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{17}$$

Resolviendo el sistema se tiene:

Tiempo del primero x = 51/2 horas.

Tiempo del segundo 2x = 51 horas.

Problemas de fuentes y obreros

48. Dos obreros hacen un trabajo en 3 horas. Uno de ellos lo haría solo en 4 horas. Hallar el tiempo que tardaría el otro solo.

49. De los tres caños que afluyen a un estanque uno puede llenarlo solo en 36 horas, otro en 30 horas y el tercero en 20 horas. Hallar el tiempo que tardarán en llenarlo juntos.

50. Los grifos A y B llenan un depósito en 1 hora y 10 min. Los grifos A y C lo hacen en 1 hora y 24 min. Los grifos B y C lo llenan en 2 horas y 20 min. Determinar el tiempo que tardarán en hacerlo cada uno por separado y los tres conjuntamente.

51. Un depósito tiene un grifo que lo llena en 3 horas; otro tarda en llenarlo 4 horas y un desagüe lo vacía en 5 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse si se abren a la vez los tres caños?

52. Un caño tarda 2 horas más que otro en llenar un depósito, y abriendo los dos juntos éste se llena en 1 hora y 20 min. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarlo cada uno por separado?

53. Un hombre efectúa un trabajo en 4 horas y un muchacho tardaría en realizar el mismo 6 horas. ¿Cuánto tiempo emplearían trabajando los dos juntos?

54. Un coche tarda en recorrer el trayecto AB 2 horas, y otro en el trayecto BA tarda 3 horas. Saliendo al mismo tiempo, uno de A y otro B, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

55. Un labrador tiene pienso para alimentar a una vaca durante 27 días, y si fuera una oveja tendría pienso para 54 días. ¿Para cuánto tiempo tendría pienso si tuviera que alimentar a la vaca y a la oveja?

56. Una casa de vecinos tiene gasóleo suficiente para que la calefacción del agua funcione durante 54 días. Con el mismo gasóleo la calefacción ordinaria duraría 27 días. ¿Para cuánto tiempo tendrán gasóleo si funcionan las dos calefacciones a la vez?

57. Dos fuentes manando juntas tardan en llenar un depósito 2 horas y 24 min. Hallar el tiempo que emplearía cada una de ellas, sabiendo que la segunda emplea dos horas menos que la primera.

58. Tras un partido de fútbol en el campo «Santiago Bernabéu», se ha observado que por las puertas Norte-1 y Norte-2 han salido los espectadores de esa zona en 18 minutos y que, además, por la puerta Norte-1 salen el doble que por la puerta Norte-2. Se pide el tiempo que tardarían en salir esos mismos espectadores por cada una de las puertas separadamente.

Problemas sobre móviles

En estos problemas supondremos siempre que se trata de un movimiento uniforme. La distancia, e, recorrida por el móvil a una velocidad, v, durante un tiempo, t, en un movimiento uniforme viene dada por

$$e = v \cdot t$$

que es la fórmula fundamental que liga estas tres magnitudes.

$$\boxed{t=\frac{e}{v}} \qquad \boxed{v=\frac{e}{t}}$$

A partir de ella pueden obtenerse las siguientes, que son equivalentes a la dada:

En la fórmula e = v • t, las magnitudes deben expresarse en unidades acordes. Por ejemplo:

- km, km/h, h
- m, m/s, s
- km, km/s, s
- m, m/min, min

Ejercicios resueltos

Un tren sale de Madrid en dirección a Ávila a las 10 de la mañana, a 30 km/h. Dos horas después sale otro tren detrás de él a 40 km/h. ¿A qué distancia de Madrid alcanzará el segundo al primero y a qué hora?

Es evidente que el espacio x recorrido por los dos trenes hasta el punto de encuentro es el mismo; por tanto, utilizaremos la fórmula: Velocidad x Tiempo = Espacio

	Velocidad	x	Tiempo	=	Espacio
Primer Tren	30	•	t	=	x
Segundo tren	40	•	(t-2)	=	x

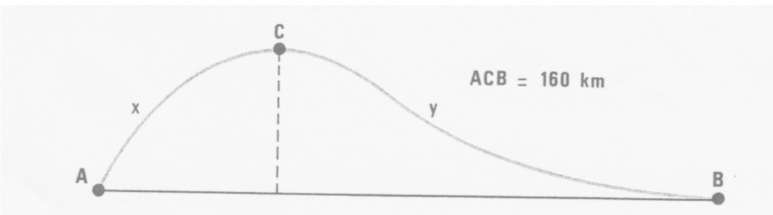
Por tanto 30•t=40•(t-2)

Resolviendo la ecuación es: t = 8.

El espacio recorrido es x = 30 • 8 = 240 km.

El segundo tren alcanzará al primero a 240 km de Madrid, a las 6 h de la tarde.

Dos pueblos A y B, distantes entre sí por carretera 160 km, se encuentran a lados distintos de una montaña. Un automóvil, saliendo de A, tarda 3 horas en llegar a B. Sabiendo que la velocidad de la subida es de 40 km/h y la de bajada de 60 km/h, ¿cuántos kilómetros hay de subida y cuántos de bajada?



$$\left.\begin{array}{l} x+y=160 \\ \dfrac{x}{40}+\dfrac{y}{60}=3 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema resulta:

Subida x=40 Km Bajada y=120 Km

Problemas de móviles

59. Un alpinista sale de excursión y regresa al punto de partida al cabo de 4 horas. La velocidad de subida es de 400 m/h y la de bajada 4 veces más. Hallar la longitud del camino.
60. 60Dos ciclistas salen del mismo lugar y al mismo tiempo hacia un pueblo situado a 90 km. El primero, que recorre 1 km más por hora que el segundo, tarda 1 hora menos. Hallar las velocidades.
61. Al recorrer 150 km un automóvil, se retrasaría 45 minutos si disminuyera su velocidad 10 km. ¿Cuál es la velocidad y el tiempo que emplea en recorrer los 150 km?
62. Una persona dispone de 2 horas y media para dar un paseo en un coche que recorre 12 km/h ¿A qué distancia del punto de partida ha de abandonar el coche para estar de regreso a la hora fijada, sabiendo que ha de volver a pie a la velocidad de 4 km/h?
63. Un tren sale a las 7 h de la mañana y recorre en una hora 40 km. Otro sale 2 y 1/2 horas más tarde a 60 km/h. ¿A qué distancia del lugar y a qué hora se encontrarán?
64. Una barca que hace el servicio de llevar pasajeros por un río, los traslada de A a B, distantes 75 km, en 3 horas y de B a A en 5 horas. Hallar la velocidad del barco y la de la corriente.
65. Un tren pasa por delante de una persona en 6 segundos y atraviesa una estación de 200 m de largo en 20 segundos. Averiguar la velocidad y la longitud del tren.
66. Un móvil recorre 210 km con movimiento uniforme. Si la velocidad aumentase 1 km, tardaría 1 hora menos en recorrerlo. Hallar la velocidad del móvil y el tiempo empleado

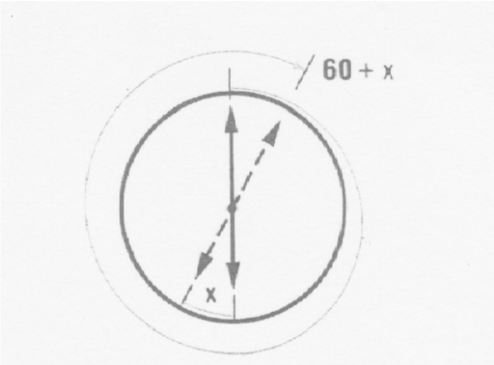
Problemas sobre relojes

En estos problemas que hay que tener presente en la resolución de este tipo de problemas es que el minutero tiene una velocidad 12 veces mayor que el horario.
Por tanto, el camino recorrido por el minutero es 12 veces mayor que el que recorre el horario. Esto se debe a que mientras el horario recorre el espacio correspondiente a 5 min, el minutero recorre el correspondiente a 60 min.

Ejercicios resueltos

Un reloj señala las 6 de la tarde. ¿A qué hora volverán a estar por primera vez las agujas en línea recta?

Cuando vuelvan a estar en línea recta, el horario habrá recorrido x minutos y el minutero (60 + x) minutos.



Teniendo en cuenta la relación de espacios:

$12 \cdot x = 60 + x$

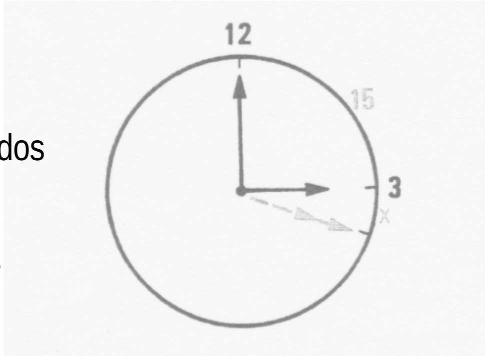
La solución es:

$x=\frac{60}{11}$ minutos => 5 minutos y 27 $\frac{3}{11}$ segundos

Por tanto, la hora es: 7 horas, 5 minutos, y 27 $\frac{3}{11}$ segundos

Un reloj señala las tres. ¿A qué hora se superpondrán las manecillas?

Si llamamos x a los minutos que recorre el horario hasta superponerse, el minutero, que está en las 12, recorrerá 15 + x.



Por tanto: $12 \cdot x = 15 + x$

La solución es $x = \frac{15}{11}$ = 1 minuto, y 21 $\frac{9}{11}$ segundos

Por tanto, la hora es: 3 horas 16 minutos 21 $\frac{9}{11}$ segundos

Problemas sobre relojes

67. Son las doce del día. ¿A qué hora estarán las agujas en línea recta?
68. Son las doce del día. ¿A qué hora formarán las agujas un ángulo recto?
69. En un reloj el horario está entre las 11 y las doce, y el minutero entre las doce y la 1. ¿Al cabo de cuánto tiempo ocuparán una posición invertida? Averiguar la hora que era en el primer caso.
70. Los relojes se ponen en hora a las 10 de la mañana; 26 horas después el uno marca 6 minutos más que el otro. La hora exacta excede en 2 minutos a la semisuma de la indicada por cada uno de los relojes. ¿Qué hora marcaba cada reloj?
71. ¿A qué hora después de las 12 forman el horario y el minutero, por primera vez, un ángulo de 30º?
72. Son las 5 de la tarde. ¿A qué hora estarán las agujas en línea recta? ¿Es necesario hacer cálculos?

Problemas de geometría

La resolución de los problemas de geometría presupone fundamentalmente el conocimiento de las principales relaciones y fórmulas de longitudes, áreas, volúmenes y ángulos.
Estos problemas deben ir siempre acompañados de un gráfico que ayudará a la comprensión de los mismos.

Ejercicios resueltos

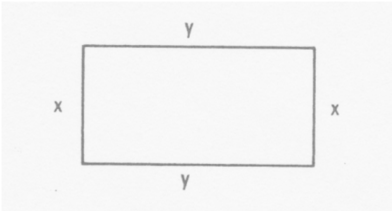
Hallar las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 60 m y su área 200 m2.

Perímetro: $2x+2y=60$

Área: $xy=200$

Resolviendo el sistema, la solución es. $x = 10$ m

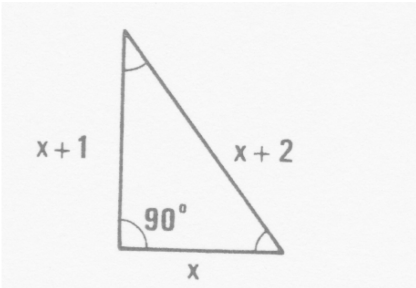
$y = 20$ m



Hallar los lados de un triángulo rectángulo, siendo la longitud de dichos lados tres números naturales consecutivos.

Aplicando el teorema de Pitágoras: $x^2 + (x+1)^2 =(x+2)^2$

La solución es: $x = 3$
$x+1 = 4$
$x+2 = 5$



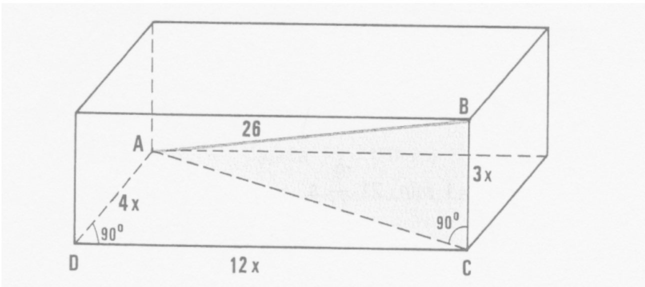
Las dimensiones de un ortoedro son proporcionales a los números 3, 4 y 12 Hallar las dimensiones sabiendo que la diagonal mide 26 m.

Por ser las diagonales proporcionales a 3, 4 y 12 son:

3x, 4x, 12x

Los triángulos ABC Y ACD son rectángulos:

$$\left.\begin{array}{l}(3x)^2+\overline{AC}^2=26^2\\ (4x)^2+(12x)^2=\overline{AC}^2\end{array}\right\}$$

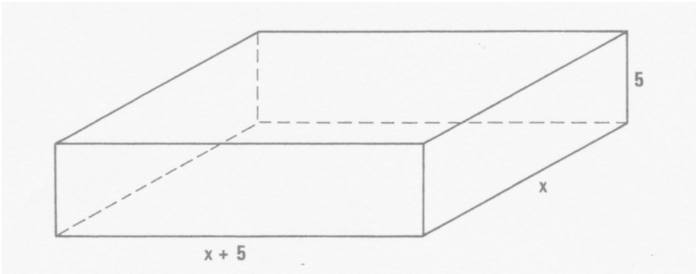


Por tanto: $(3x)^2+(4x)^2+(12x)^2=26^2$

Resolviendo la ecuación se obtiene x=2

Las dimensiones del ortoedro son 6 m 8 m 24m

Una caja rectangular tiene un volumen de 1.500 dm. Su altura es 5 dm y la largura es 5 dm mayor que su anchura. Hallar las dimensiones



Las dimensiones son: 5, x, x+5

Aplicando la fórmula del volumen:

$$5 \bullet x \bullet (x+5) = 1500$$

Resolviendo la ecuación, resulta que x = 15

Las dimensiones son. 5 dm, 15 dm, 20 dm

Problemas sobre relojes

73. Un triángulo es semejante a otro cuyos lados son 3, 4 y 5. Hallar los lados sabiendo que su perímetro es 72 cm.
74. Calcular los ángulos de un pentágono sabiendo que son proporcionales a los 5 primeros múltiplos de 3.
75. Un rectángulo tiene 48 cm^2 de área y su diagonal es 10 cm. Hallar las dimensiones.
76. Los lados y la diagonal de un rectángulo son tres números pares consecutivos. Hallar estos elementos.
77. Calcular las dimensiones de un rombo sabiendo que su lado mide 5 cm y su área 24 cm^2.
78. La hipotenusa del triángulo rectángulo mide 10 cm y la suma de los catetos vale 14 cm. Calcular los catetos.
79. Se tiene un lote de baldosas cuadradas. Si se forma con ellas un cuadrado de x baldosas por lado sobran 87, y si se toman x + 1 baldosas por lado faltan 40. ¿Cuántas baldosas hay en el lote?
80. Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de anchura uniforme. Calcular la anchura de dicho camino si se sabe que su área es de 540 cm^2.
81. La suma de los radios de dos círculos es 113 cm, y la suma de las áreas es igual a otro círculo de 85 cm de radio. Hallar los radios.
82. Los tres lados de un triángulo miden 18, 16 y 19 cm. Determinar qué misma cantidad se debe restar a cada uno para que resulte un triángulo rectángulo.
83. Aumentando un lado de un cuadrado en 4 m y los lados contiguos en 6 m, se obtiene un rectángulo de doble área que el cuadrado. Hallar los lados del cuadrado.
84. Los lados de un triángulo valen 15, 18 y 23 cm. Con centro en cada vértice se trazan tres circunferencias que son tangentes entre sí dos a dos. Hallar los radios de las mismas.
85. Dos postes de 10 m y 6 m están separados por una longitud de 16 m. Dos pájaros que están en las puntas van a beber en una fuente que está entre ambos. Yendo con igual velocidad llegan al mismo tiempo. ¿A qué distancia de ambos postes se encuentra la fuente?

86. Un campo rectangular tiene 24 áreas de superficie y 20 m de longitud más que de anchura. Hallar las dimensiones.
87. La suma de las áreas de dos cuadrados es 3 250 m^2 y su diferencia es 800 m^2. Calcular los lados.
88. La suma de los lados de dos cuadrados es 50 m, y el área del rectángulo formado por sus diagonales 1 200 m^2. Hallar los lados de los cuadrados.
89. Calcular las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 75 m, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 36 y 48 m, respectivamente.
90. En un círculo de diámetro 25 m se inscribe un rectángulo teniendo 17 m de diferencia entre sus dos dimensiones. Hallar los lados.
91. Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Hallar la longitud de cada lado sabiendo que el área es 24 m^2.
92. Las dimensiones de un ortoedro son proporcionales a 3, 4 y 5. Hallar estas dimensiones sabiendo que el volumen del ortoedro es 1620 cm^3.
93. En un jardín de forma rectangular, cuyas dimensiones son 80 m y 90 m, se construye un estanque rectangular cuyos lados miden 10 m y 15 m. La tierra extraída se esparce alrededor del estanque y el nivel del terreno se eleva así 3 cm. Hallar la profundidad del estanque.
94. En un paralelepípedo rectángulo las tres dimensiones son proporcionales a los números 3, 4 y 12 y su suma es 38. Hallar las dimensiones y la diagonal del paralelepípedo.
95. Las dimensiones de un ortoedro son proporcionales a los números 3, 4 y 8/3, y la cara que tiene las dos primeras dimensiones tiene una diagonal que mide 15 m. Hallar las dimensiones del ortoedro y la diagonal del mismo.
96. Los perímetros de las caras de un ortoedro son 54 cm, 80 cm y 98 cm, respectivamente. Se desea calcular el área total y el volumen.
97. Un prisma recto tiene por base un triángulo de 80 cm de perímetro, cuyos lados son proporcionales a los números 15, 8 y 17. Hallar el volumen del prisma, sabiendo que el área de la superficie lateral es 240 cm^2 (utilizar la fórmula de Herón).
98. Sean dos cubos cuyas aristas difieren en 2 cm, y sus volúmenes en 56 cm3. Hallar el valor de las aristas.
99. Hallar las tres aristas de un ortoedro, sabiendo que sumadas de dos en dos, dan, respectivamente, 163 cm, 148 cm, y 141 cm.
100. Las dimensiones de un ortoedro son entre sí como los números 3,4 y 50. Hallar las dimensiones y el volumen sabiendo que el área total es 724 cm2.
101. Una pieza rectangular de cinc es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm3 cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Hallar las dimensiones de la caja.